



Rapport de PRE

Etude de problèmes au bilaplacien avec changement de signe.

rédigé par Jérémy FIROZALY (promotion 2013)
sous la direction d'Anne-Sophie BONNET-BENDHIA,
au sein de l'unité de mathématiques appliquées de l'ENSTA ParisTech,
32 Boulevard Victor, 75015 Paris.

Août 2012

Rapport non confidentiel et publiable sur internet.

Attestation de non confidentialité⁶

Par la présente, je soussigné (e) Madame / Monsieur * NOM Prénom

Anne... Sophie... Bonnet... Ben Dhia... P.O. Lucas... Ehemel.....

.....

Employé(e) en tant que (qualité)

..Directrice de recherche.....

dans la société : NOM

..Laboratoire...UMA...- Equipe...P.O.E.M.S.....

ADRESSE de l'établissement :

...E.N.S.T.A.....ParisTech.....

...8.28, Boulevard des Maréchaux.....

...91.762 Palaisau...C.E.A.E.X.....

Atteste sur l'honneur que les données contenues dans le rapport de

~~Mademoiselle~~ / Monsieur * NOM Prénom

...Jérémy... Adria... Finozaly.....

ne sont pas confidentielles. Par conséquent, le contenu peut être communiqué et diffusé à l'extérieur sous format papier et/ou électronique. Si l'organisme d'accueil ne souhaite pas que le document soit diffusé en ligne, Le stipuler.

A.....Palaisau.....

Le.23./08/2012

⁶ A joindre au rapport de stage et à remettre à la bibliothèque lors de la signature du circuit de départ

= Rayer la mention inutile

Signature et cachet

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping, stylized strokes that are difficult to decipher. The signature is positioned above the printed contact information.

ENSTA ParisTech / UMA
828, Boulevard des Maréchaux
91762 Palaiseau Cedex

Remerciements

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à ma tutrice de stage, Anne-Sophie BONNET, enseignant chercheur à l'UMA, qui m'a encadré quotidiennement pendant ces trois mois et m'a donné les outils nécessaires pour m'initier à la recherche ainsi qu'à Lucas CHESNEL qui m'a soumis la problématique sur laquelle j'ai travaillé et a coordonné l'évolution de mon travail de recherche.

Par ailleurs, je souhaitais remercier chaleureusement l'ensemble des enseignants chercheurs et membres de l'UMA qui m'ont proposé ponctuellement leur aide : Sonia FLISS, Christophe HAZARD, Patrick CIARLET, Marc LENOIR, Jean-François MERCIER, Laurent BOURGEOIS, Frédéric JEAN, Eric LUNEVILLE, Patrick JOLY et Christophe MATHULIK.

Enfin, mes pensées vont vers mes amis thésards et stagiaires du laboratoire qui m'ont guidé durant ces trois mois : Nicolas CHAULET, Nicolas SALLES, Giovanni GRANATO, Camille CARVALHO, Maxence CASSIER, Maxime CHUPIN et Mathieu CHAMAILLARD.

Résumé

Les équations au bilaplacien se retrouvent, dans les écoulements de Stokes ou dans des problèmes de transmissions intérieures dans le cadre de la théorie de la diffraction. Il est important de savoir dans quelle situation le problème, est bien posé au sens suivant : considérant un espace variationnel adapté, un problème est bien posé lorsqu'il y a existence et unicité de la solution ou tout du moins, que l'opérateur fonctionnel soit de type Fredholm. Cette propriété dépend à la fois de la géométrie du domaine 2D dans lequel on se place mais aussi des variations spatiales de l'indice, notamment lorsqu'il varie autour de 1.

Durant mon stage, j'ai étudié les cas où l'indice est constant (on parle du cas "sans contraste") puis constant par morceaux, pour un secteur semi-circulaire infini avec des conditions aux limites de type Dirichlet/Neumann mêlées à des conditions de raccord. Ce rapport a pour objet l'étude de différentes configurations, c'est-à-dire, des géométries changeantes, tout comme cela a été réalisé dans la thèse de Lucas CHESNEL. L'étude du cas où l'indice reste toujours du même côté de la valeur 1 sera abordée en premier lieu car on peut rapidement montrer que le problème est bien posé. Une étude de la régularité locale des solutions sera réalisée, tout d'abord dans le cas à indice constant puis indice variable. Dans un second temps, on étudiera le cas où l'indice varie autour de 1 mais reste du même côté de 1 dans un voisinage de la frontière et enfin, lorsqu'il varie autour de 1 jusqu'au bord du domaine. Dans ces trois parties sera étudiée l'existence de certaines solutions particulières, appelées singularités, qui permettent d'étudier la régularité des solutions près des bords et dans certains cas, de montrer que le problème est mal posé.

mots-clés :

- Bilaplacien ;
- opérateur de Fredholm ;
- singularités.

Table des matières

Table des matières	6
Table des figures	7
1 Etude de cas lorsque σ ne change pas de signe	8
1.1 Théorie variationnelle, étude du caractère bien posé	9
1.2 Etude de la régularité de la solution.	11
1.2.1 Cas sans contraste	11
1.2.2 Cas avec contraste strictement positif	19
1.3 Cas avec contraste strictement négatif	21
2 Etude de cas lorsque σ reste du même signe dans un voisinage de la frontière.	23
2.1 Quelques rappels sur les opérateurs	23
2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur	24
3 Etude de cas lorsque σ change de signe jusqu'au bord du domaine.	26
3.1 calcul de singularités	26
3.2 contradiction du lemme de Peetre	28
3.3 Conclusion	31
Bibliographie	32
A Lemme de Peetre (preuve)	33
B exposants de singularité et régularité	35

Table des figures

1.1	Domaine Oméga	8
1.2	Secteur	12
1.3	sinus cardinal carré sur \mathbb{R}	16
1.4	singularité pour $\beta = 0.55\pi$	17
1.5	singularité pour $\beta = 0.95\pi$	18
1.6	singularité pour $\beta = \pi$	18
1.7	singularité pour $\beta = 1.25\pi$	18
1.8	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 1.3$	19
1.9	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 1.9$	20
1.10	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 2.5$	20
1.11	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 3.7$	20
1.12	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = -3.1$	21
1.13	singularité pour $\beta = \pi$ et $k = -8$	21
1.14	singularité pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $k = -4.9$	22
1.15	singularité pour $\beta = 1.3\pi$ et $k = -4.9$	22
2.1	omega borné	25
3.1	singularité sur l'axe $Re(\lambda) = 1$	27

Chapitre 1

Etude de cas lorsque σ ne change pas de signe

Notations et présentation du problème général

Considérons Ω un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 . On note $L^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions à valeur complexe de carré intégrable sur Ω , $H^1(\Omega)$ le sous-espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées premières sont aussi dans $L^2(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact dans Ω . Notons $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions complexes bornées sur Ω et $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$.

On notera à la fois $(\cdot, \cdot)_\Omega$ le produit scalaire usuel sur $L^2(\Omega)$ et celui sur $L^2(\Omega)^2$ et $\|\cdot\|_\Omega$ les normes associées. On munit $H^{-1}(\Omega)$ de la norme subordonnée $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$.

On définit $H_0^1(\Omega)$ et $H_0^2(\Omega)$ comme les fermetures respectives de $C_0^\infty(\Omega)$ pour les normes H^1 et H^2 et on munit $H_0^2(\Omega)$ du produit scalaire :

$(u, v) \mapsto (\Delta u, \Delta v)_\Omega$. Ceci permet de définir $\|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)}$.

Dans toute la suite, on considère une partition de l'ouvert Ω en deux ouverts connexes Ω_1 et Ω_2 d'indices respectifs n_1 et n_2 .

On pose $\sigma_1 = 1/(n_1 - 1)$ et $\sigma_2 = 1/(n_2 - 1)$. Lorsque l'ouvert Ω est borné, sa frontière $\partial\Omega$ sera supposée lipschitzienne.

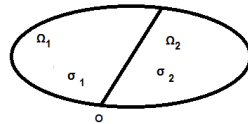


FIGURE 1.1 – Domaine Oméga

1.1 Théorie variationnelle, étude du caractère bien posé

On considère la configuration ci-dessus (même si l'on pourrait généraliser à d'autres géométries), où Ω est à frontière C^2 avec un contraste $k = \sigma_1/\sigma_2$ strictement positif où σ_1 et σ_2 constants. La fonction globale est notée σ . Notons Σ la frontière entre Ω_1 et Ω_2 w sa normale ainsi que n la normale sortante à $\partial\Omega$.

Soit $f \in C_0^\infty(\Omega)$, on cherche à résoudre le problème suivant. Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ telle que : $\Delta(\sigma\Delta u) = f$. En notant u_1 et u_2 les restrictions de u à Ω_1 et Ω_2 , on peut le réécrire de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \Delta \Delta u_1 = f \text{ sur } \Omega_1 \\ \sigma_2 \Delta \Delta u_2 = f \text{ sur } \Omega_2 \\ u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \setminus \Sigma \\ u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_2 \setminus \Sigma \\ u_1 - u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial w} - \frac{\partial u_2}{\partial w} = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \sigma_1 \Delta u_1 - \sigma_2 \Delta u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \\ \sigma_1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial n} - \sigma_2 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma \end{array} \right.$$

Théorème 1 (Lax-Milgram) *Soit H un espace de Hilbert, $l(\cdot)$ une forme linéaire continue sur H , $a(\cdot, \cdot)$ bilinéaire et continue sur H . Alors, le problème $a(u, v) = l(v) \forall v \in H$ possède une unique solution.*

Preuve : Voir chapitre 1, section 1.4.3 de [1]

La formulation variationnelle du problème est de la forme précédente avec $H = H_0^2(\Omega)$ muni de la norme H^2 ,

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \Delta u \Delta v d\Omega$$

et

$$l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Pour obtenir la forme bilinéaire a (ou plutôt sesquilinéaire dans le cas complexe), on a utilisé deux fois la formule de Green avec les conditions aux limites essentielles dans $H_0^2(\Omega)$ et les conditions de raccord en α . La continuité de a et de l provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ puis des majorations des normes L^2 des fonctions u et v et de leurs laplaciens par la norme H^2 des fonctions. (σ ne causant aucun problème car bornée).

Pour la coercivité de a , sachant que σ ne pose pas de problèmes (il suffit de considérer le minimum entre σ_1 et σ_2 qui est strictement positif), elle provient directement de l'équivalence entre la norme précédemment posée sur $H_0^2(\Omega)$ et la norme H^2 . Pour une preuve, voir le théorème IX.26 de [2] et pour une généralisation dans le cas où Ω est polygonal non nécessairement convexe, voir le théorème 2.2.3 de [3].

1.2 Etude de la régularité de la solution.

1.2.1 Cas sans contraste

Nous reprenons ici intégralement l'étude effectuée dans le chapitre 3 de [3] car la dernière partie de son étude correspond au cas du secteur sans contraste. Pour les détails techniques, on se reportera directement à l'ouvrage, ici n'étant proposé que le fil conducteur et la philosophie générale adoptée.

Son objectif était d'étudier la régularité des solutions des équations au bilaplacien avec $f \in L^2(\Omega)$, dans le cas où Ω constitue un domaine polygonal.

Il a d'abord utilisé la technique variationnelle (en montrant l'équivalence entre le problème variationnel et le problème initial) tout comme fait précédemment dans ce rapport pour montrer qu'il existe une unique solution du problème suivant dans $H_0^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} \Delta\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour le résultat de régularité interne, loin des coins, il a démontré que la solution était en fait dans $H^4(\Omega)$. L'idée de la démonstration est la suivante : il a réalisé le produit avec une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et réécrit le nouveau problème vérifié par le produit. Il a ensuite effectué une transformée de Fourier (possible car comme φ est à support compact dans Ω on peut se placer sur tout \mathbb{R}^2 cela ne change rien). La transformée de Fourier étant une isométrie de $L^2(\Omega)$, le second membre reste dans $L^2(\Omega)$ (théorème de Plancherel) et on en déduit grâce à l'égalité avec le premier membre, que φu est bien dans $H^4(\Omega)$.

La régularité de la solution sur la frontière, loin des coins, est aussi $H^4(\Omega)$ mais ne peut être obtenue par une technique de réflexion classique. Il commence déjà par montrer le résultat pour un problème auxiliaire plus simple et décompose la solution initiale u sous la forme d'une somme d'un élément du noyau d'un opérateur voisin du bilaplacien et de la convolution de la solution du problème plus simple par une fonction de Green. Pour la fonction du noyau, il passe par une transformée de Fourier sur \mathbb{R}^2 pour montrer le résultat voulu.

Pour étudier la régularité près d'un coin, Grisvard effectue un changement de coordonnées en polaire et effectue le produit avec une fonction de troncature pour faire une localisation et se ramener à l'étude de la régularité sur un secteur infini :

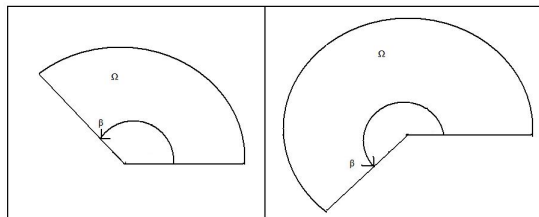


FIGURE 1.2 – Secteur

Afin de pouvoir effectuer une transformée de Fourier selon le rayon r , il réalise le changement de variables $r = \exp(t)$ pour se ramener dans une bande infinie : ceci constitue la méthode de Kondratiev. L'équation de départ devient une équation différentielle en θ paramétrée par des coefficients dépendant de la variable conjuguée de t par la transformée de Fourier notée τ . Munie des conditions aux limites traduisant les diverses nullités sur le bord, l'équation homogène correspondante n'admet que la solution nulle sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs complexes de τ que l'on appelle valeurs propres.

En repassant en transformée de Fourier inverse, utilisant la formule de Cauchy et le théorème des résidus, on arrive à une décomposition explicite de la solution de départ en fonction de ces valeurs propres.

Enfin, il repasse à une étude globale en décomposant la solution comme somme d'une fonction de $H^4(\Omega)$ et d'une fonction dépendant de ces valeurs propres.

A travers la définition des valeurs propres, nous venons ici d'effleurer une notion qui prendra toute son importance dans le cas avec contraste : celle de singularité. Une singularité est une solution non nulle du problème homogène et elle permet, comme fait précédemment, une étude de la régularité des solutions. Avec un contraste négatif, lorsqu'elle n'appartient pas à l'espace variationnel $H_0^2(\Omega)$, elle permet de contredire l'estimation du lemme de Peetre et de déduire que l'opérateur n'est pas de Fredholm.

J'ai recherché de façon intuitive, en coordonnées polaires pour le cas où Ω est un secteur infini, les singularités aux problèmes avec et sans contraste de la forme particulière de fonctions à variables séparées $u(r, \theta) = r^\lambda g(\theta)$ avec λ complexe (la justification de la forme choisie pour la fonction radiale viendra ultérieurement). Dans le cas sans contraste, Grisvard a montré qu'il s'agissait des seules que l'on peut trouver. On pouvait aussi utiliser une décomposition en série de Fourier en θ comme fait dans la proposition 3.3.1 de [9]. Dans le cas avec contraste, il ne m'a pas été possible de montrer un tel résultat car je ne pouvais plus effectuer de transformée de Fourier à cause des conditions de raccord.

Avant d'exposer les calculs de la recherche des exposants de singularités, introduisons le lemme suivant qui permet de donner des conditions sur λ pour assurer une certaine régularité des singularités :

Lemme 1 :

On a $u \in L^2(\Omega)$ si et seulement si $Re(\lambda) > -1$.

On a $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $Re(\lambda) > 0$.

On a $u \in H^2(\Omega)$ si et seulement si $Re(\lambda) > 1$.

On a $u \in H^3(\Omega)$ si et seulement si $Re(\lambda) > 2$.

On a $u \in H^4(\Omega)$ si et seulement si $Re(\lambda) > 3$.

Preuve : Une démonstration est proposée en annexe B.

Dans les calculs correspondant à la recherche des singularités, on se place dans le cas avec contraste, où σ est une fonction de θ uniquement et dans cette section, il suffira de ne pas considérer les conditions de raccord et de remplacer σ par 1. On pose β l'angle du secteur et on considère un angle $\alpha < \beta$. Avec les nouvelles notations, le problème se réécrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \Delta \Delta u_1 = 0 \text{ sur } \Omega_1 \\ \sigma_2 \Delta \Delta u_2 = 0 \text{ sur } \Omega_2 \\ u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \beta \\ u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial n} = 0 \text{ en } \theta = 0 \\ u_1 - u_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{\partial u_2}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \alpha \\ \sigma_1 \Delta u_1 - \sigma_2 \Delta u_2 = 0 \text{ en } \theta = \alpha \\ \sigma_1 \frac{\partial \Delta u_1}{\partial \theta} - \sigma_2 \frac{\partial \Delta u_2}{\partial \theta} = 0 \text{ en } \theta = \alpha \end{array} \right.$$

Remarquons que la recherche de singularités, c'est-à-dire de fonctions non nulles solutions du problème homogène n'est pas en contradiction avec le fait que la seule solution homogène au problème de départ, bien posé, est la fonction nulle. En effet, par les transformations effectuées et la technique de localisation, les singularités ne vérifient pas les conditions aux limites de départ sur le domaine polygonal.

On voit que σ n'intervient explicitement que dans les conditions de raccord en α car il se simplifie par linéarité de la dérivation dans chacun des domaines. Par ailleurs, on a pu écrire deux équations séparées sur chacun des domaines à partir de l'équation globale $\Delta(\sigma\Delta u) = 0$ en polaire grâce à ces mêmes conditions de raccord, qui ont permis de passer de la dérivée seconde globale en θ au sens des distributions à une dérivée seconde usuelle sur Ω_1 et Ω_2 en utilisant successivement deux fois la formule des sauts pour $\sigma(\theta)\Delta u$. Sur chacun des domaines (en négligeant les indices), après simplification, et considérant des singularités de la forme $f(r)g(\theta)$, on arrive à l'équation suivante après avoir multiplié par $\frac{r^4}{f(r)g(\theta)}$:

$$\frac{r^4 f^{(4)}(r) + 2r^3 f^{(3)}(r) - r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} + \frac{2r^2 g''(\theta) f''(r)}{f(r)g(\theta)} + \frac{g^{(4)}(\theta)}{g(\theta)} - \frac{2r f'(r) g''(\theta)}{f(r)g(\theta)} + \frac{4g''(\theta)}{g(\theta)} = 0$$

On voit alors qu'on ne peut directement séparer d'un côté les fonctions en r et de l'autre en θ sauf si l'on considère des fonctions f telles que la dérivation soit équivalente à la perte d'un exposant. C'est ici que se justifie le choix de considérer des fonctions $f(r) = r^\lambda$. En posant $d = \lambda - 1$ on se retrouve avec la même équation que dans 3.2.3 de [3] :

$$(d^4 - 2d^2 + 1)g(\theta) + (2 + 2d^2)g''(\theta) + g^{(4)}(\theta) = 0$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (version linéaire), l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension 4 dont les fonctions de base dépendent de la valeur de λ :

- Pour $\lambda = 0$ ou 2 , les fonctions de base ont pour expression $1, \theta, \sin(2\theta), \cos(2\theta)$;
- Pour $\lambda = 1$, les fonctions de base ont pour expression $\theta \cos(\theta), \theta \sin(\theta), \sin(\theta), \cos(\theta)$;
- Pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$, les fonctions de base ont pour expression $\sin(\lambda\theta), \cos(\lambda\theta), \sin((\lambda - 2)\theta), \cos((\lambda - 2)\theta)$.

Remarquons que l'équation est stable par passage au conjugué et est paire en d . Ce qui signifie que si λ est un exposant de singularité, $2-\lambda$ aussi. Dans le cas sans contraste, on écrit u comme combinaison linéaire de 4 fonc-

tions sur tout le domaine Ω et devant respecter les 4 conditions aux limites essentielles dans $H_0^2(\Omega)$. On se retrouve avec un système de 4 équations à 4 inconnues (les 4 coefficients de la combinaison linéaire) qui n'admet une solution non nulle que si son déterminant est nul.

Dans le cas avec contraste, on écrira u_1 et u_2 comme de telles combinaisons dans chacun des domaines (donc 8 inconnues) et on complètera les conditions aux limites avec les 4 conditions de raccord.

Dans le cas sans contraste, on aboutit au même déterminant que dans lemme 3.2.3 [3], à savoir que λ est une singularité si et seulement si :

$$\sin^2((\lambda - 1)\beta) = (\lambda - 1)^2 \sin^2(\beta). \quad (1.1)$$

Lorsque $\beta = \pi$, on a directement que l'ensemble des exposants de singularités est \mathbb{Z} , un ensemble discret et infini. Nous allons généraliser ce constat à tous les angles β c'est-à-dire qu'on aboutit à un sous-ensemble infini de \mathbb{C} dénombrable.

La fonction $h : z \mapsto \sin^2(z\beta) - z^2 \sin^2(\beta)$ est une fonction entière (analytique sur \mathbb{C}). On cherche donc les zéros de h .

Théorème 2 *L'ensemble des racines d'une fonction f analytique sur tout \mathbb{C} non nulle est dénombrable.*

Preuve : D'après le principe des zéros isolés, f n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout compact. En effet, si par l'absurde K est un compact tel que f y possède une infinité de racines, on peut exhiber une suite de zéros. De cette suite, on peut extraire une sous-suite convergente vers un point b du compact K . Par continuité de f en b , b est aussi une racine et c'est un point d'accumulation de racines donc on a contradiction avec le principe des zéros isolés. En considérant le recouvrement de \mathbb{C} par l'union dénombrable des boules fermées (donc compactes) de rayon $n \in \mathbb{N}$, on en déduit le caractère dénombrable.

Focalisons-nous maintenant sur le caractère infini. Pour un angle de π , cela a déjà été fait. On peut remettre le problème sous la forme, chercher les zéros (à β fixé) des deux fonctions $q : (z, \beta) \mapsto \sin(z\beta) - z \sin(\beta)$ et $p : (z, \beta) \mapsto \sin(z\beta) + z \sin(\beta)$. Pour un angle β proche de π , on généralise grâce au théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. La continuité des racines provient du fait que pour $k \in \mathbb{Z}$ on a $\frac{\partial p}{\partial z}(k, \pi) = \frac{\partial q}{\partial z}(k, \pi) = \pi(-1)^k \neq 0$. En divisant (1.1) par $z^2 \beta^2$, on tombe sur l'équation d'une ligne de niveau (le second membre reste réel) :

$$\operatorname{sinc}^2((\lambda - 1)\beta) = \operatorname{sinc}^2(\beta). \quad (1.2)$$

Pour β différent de π (même très proche), comme $\text{sinc}^2(\beta) \neq 0$ et que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sinc}^2(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sinc}^2(x) = 0$$

on montre que l'on n'a plus qu'un nombre fini d'exposants de singularités réels pour $\beta \neq \pi$ comme l'illustre le graphe suivant avec une ligne de niveau v arbitraire non nulle :

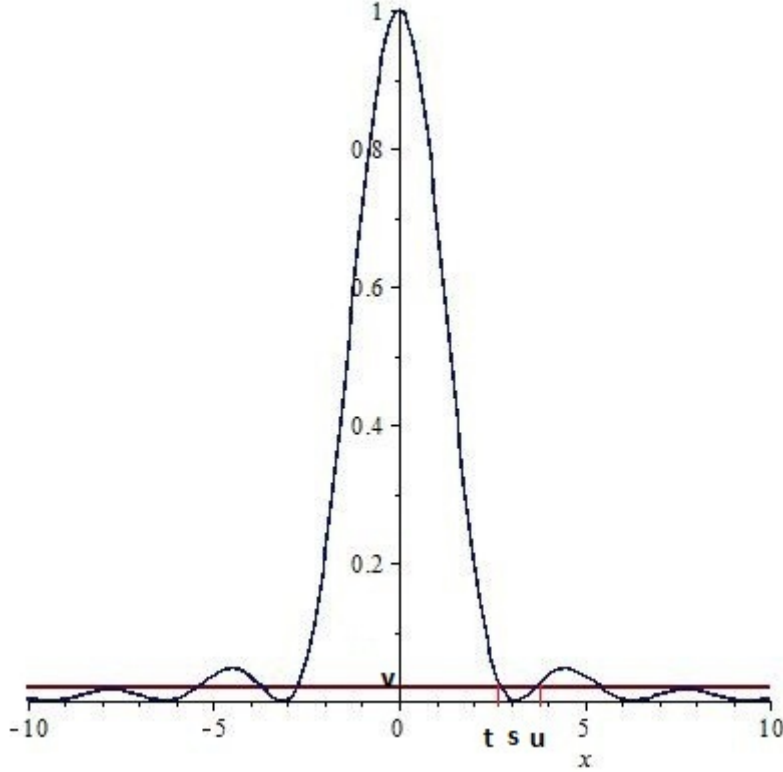


FIGURE 1.3 – sinus cardinal carré sur \mathbb{R}

Pour ne pas contredire le théorème des fonctions implicites autour de π , des zéros doivent partir dans le plan complexe lorsque β varie. Avec le même graphe, on observe que lorsque l'on passe de zéro à v , la racine double réelle s de la fonction h , s'est transformée en t et u (racines simples). Il y a donc des racines qui restent réelles et via un développement limité de (1.1), on peut montrer facilement que lorsque π varie d'une quantité $\epsilon \in \mathbb{R}$, les racines varient d'une quantité réelle $\frac{2k\epsilon}{\pi}$ au premier ordre.

En fait, de façon plus générale, pour tout angle $\beta \neq 0[\pi]$, non nécessairement proche de π , on a le théorème suivant énoncé aussi dans theorem 7.1.1 et démontré dans theorem 3.1.1 de [10] :

Théorème 3 *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la bande $\frac{k\pi}{\beta} < \text{Re}(\lambda - 1) < \frac{(k+1)\pi}{\beta}$ contient deux exposants de singularités.*

Preuve : Afin de se placer sur une partie connexe, on se place dans le cas $\beta < \pi$ mais on raisonne de même pour $\beta > \pi$. On raisonnera en variable réduite $u = (\lambda - 1)\beta$ pour se ramener à une bande $k\pi < \text{Re}(u) < (k + 1)\pi$ indépendante de β .

On pose $f_\beta : u \mapsto \text{sinc}^2(u) - \text{sinc}^2(\beta)$ et :

$$g_k : \begin{cases}]0, \pi[\rightarrow \mathbb{N} \\ \beta \mapsto \text{card}\{u \in \mathbb{C} / k\pi < \text{Re}(u) < (k + 1)\pi \text{ et } f_\beta(u) = 0\} \end{cases}$$

Montrons que g_k est continue, et à valeurs dans \mathbb{N} , elle en sera automatiquement constante sur $]0, \pi[$, en fait égale à 2, comme montré par le théorème des fonctions implicites au voisinage de π .

Soit donc $w \in]0, \pi[$, on va montrer que g_k est continue en w .

Dans theorem 3.1.1 de [10], il est montré que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, f_α ne s'annule pas sur les droites $\text{Re}(u) = k\pi$ et $\text{Re}(u) = (k + 1)\pi$ et que les éventuelles racines sont uniformément bornées. Pour $\alpha = w$, la fonction f_w ne s'annulera pas sur un contour fermé noté γ contenu entre ces droites (et passant par ces droites) à condition de le prendre "assez haut". $|f_w|$ qui est continue sur γ compact admet donc un minimum m non nul (car f ne s'annule pas sur γ) sur ce contour.

Soit $v \in]0, \pi[$ (on ne sait absolument pas si $v \in \gamma$ ou non), soit $z \in \gamma$, on a $|f_w(z) - f_v(z)| \leq |f_w(z) - f_w(v)| + |f_w(v) - f_v(v)| + |f_v(v) - f_v(z)|$ et par continuité de f_w sur \mathbb{C} , on a : $\lim_{v \rightarrow w} f_w(v) = f_w(w) = 0$

Pour v proche de w et tout $z \in \gamma$, on a $|f_w(v)| \leq \frac{m}{2} < m \leq |f_w(z)|$ donc, $|f_w(z) - f_v(z)| < |f_w(z)|$ avec f_w et f_v entières donc par le théorème de Rouché (voir théorème 3.8 de [11]), on a $g_k(v) = g_k(w)$ donc en particulier on a bien la continuité c'est-à-dire $\lim_{v \rightarrow w} g_k(v) = g_k(w)$. Ceci conclut le théorème.

Voici pour conclure cette partie, les graphes montrant la localisation des exposants de singularités sur le plan complexe :

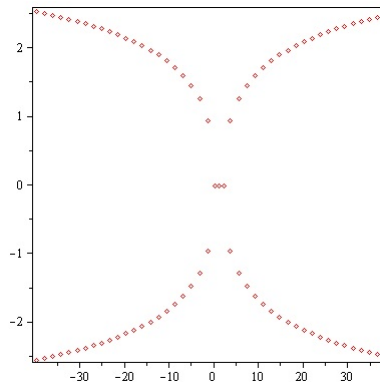


FIGURE 1.4 – singularité pour $\beta = 0.55\pi$

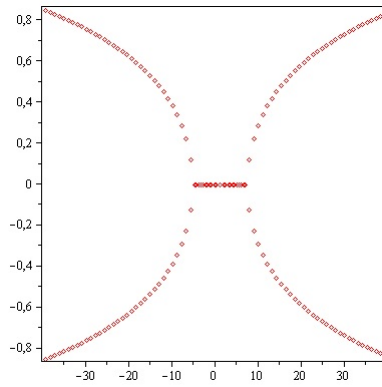


FIGURE 1.5 – singularité pour $\beta = 0.95\pi$

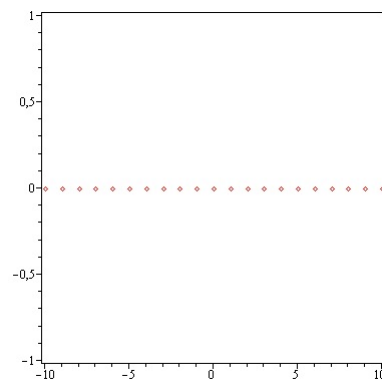


FIGURE 1.6 – singularité pour $\beta = \pi$

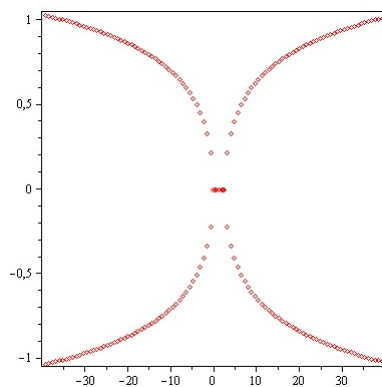


FIGURE 1.7 – singularité pour $\beta = 1.25\pi$

1.2.2 Cas avec contraste strictement positif

Là encore, tout comme ce qui est fait dans le théorème 3.2.10 de [3], on peut montrer que la solution variationnelle du problème bien posé, se décompose sous la somme d'une fonction de $H^4(\Omega)$ et de singularités. Ceci explique l'intérêt de les rechercher car ce sont elles qui déterminent la régularité de la solution.

Pour des raisons pratiques, on considère que la frontière entre Ω_1 et Ω_2 est située en $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Soit $k > 0$ le contraste.

On rappelle qu'avec contraste, on écrit u_1 et u_2 comme des combinaisons des fonctions de bases dans chacun des domaines (donc 8 inconnues) et on complète les conditions aux limites avec les 4 conditions de raccord. Le déterminant obtenu dans ce cas reste une fonction entière et on en déduit encore le caractère dénombrable de l'ensemble complexe des exposants de singularités. L'expression du déterminant étant beaucoup plus longue et sans intérêt supplémentaire, car je n'ai pas pu appliquer le théorème de Rouché et les autres outils rencontrés à cause de sa complexité, elle ne sera pas donnée ici, sauf dans certaines configurations. Le caractère infini n'a donc pas été prouvé théoriquement et a seulement semblé être observé sur Maple. Remarquons que pour certaines valeurs de k , il semble que l'on n'ait que des singularités réelles. Les graphes suivants ont été obtenus pour $\beta = \pi$ et les graphes à $\beta \neq \pi$ ont la même apparence.

Voici pour conclure cette partie, les graphes montrant la localisation des exposants de singularités sur le plan complexe :

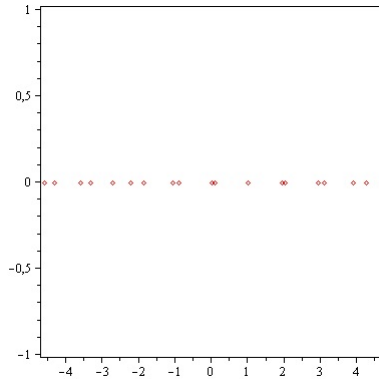


FIGURE 1.8 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 1.3$

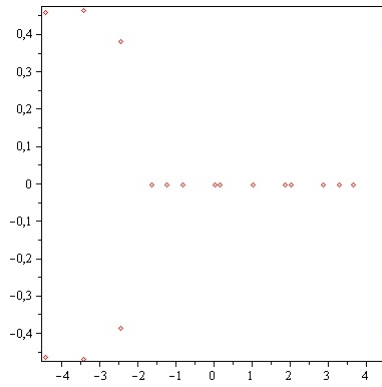


FIGURE 1.9 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 1.9$

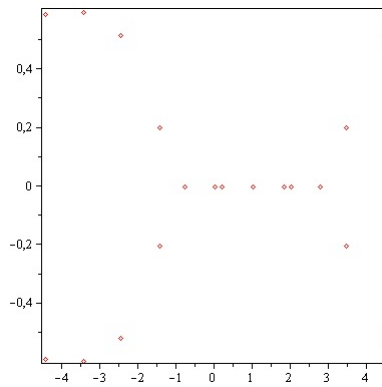


FIGURE 1.10 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 2.5$

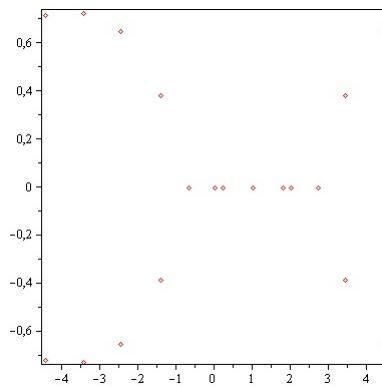


FIGURE 1.11 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = 3.7$

1.3 Cas avec contraste strictement négatif

On peut montrer que la forme bilinéaire a n'est jamais coercive sur $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ tout comme cela est fait dans l'introduction du chapitre 1 de [4]. En effet, considérons $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ et $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega_2)$ non nulles et définissons φ telle que sa restriction à Ω_1 soit φ_1 et sa restriction à Ω_2 soit $\mu\varphi_2$ avec $\mu = \frac{(\int_{\Omega_1} \sigma_1 |\Delta\varphi_1|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\int_{\Omega_2} |\sigma_2| |\Delta\varphi_2|^2)^{\frac{1}{2}}}$. On a alors $\varphi \in H_0^2(\Omega)$ non nulle et $a(\varphi, \varphi) = 0$.

Etant donné qu'il n'y a alors plus de solution variationnelle, les singularités ne peuvent plus servir à étudier la régularité de "la solution" (puisque'il n'y a plus nécessairement existence et unicité, le terme n'a plus de sens). Elles ont une autre utilité qui sera détaillée dans le chapitre 3.

L'ensemble des exposants de singularités reste encore dénombrable pour les mêmes raisons que le cas sans contraste. La perte de convexité pour $\beta > \pi$ semble avoir un effet sur les singularités. Voici les graphes correspondants :

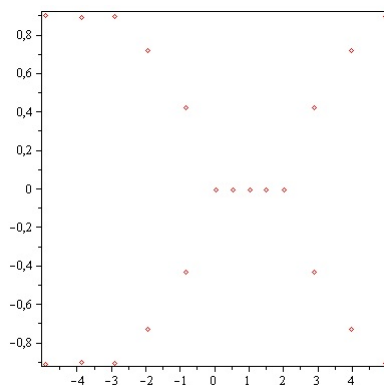


FIGURE 1.12 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = -3.1$

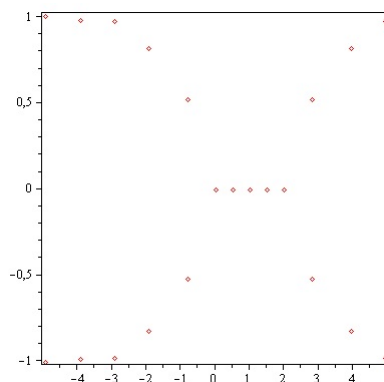


FIGURE 1.13 – singularité pour $\beta = \pi$ et $k = -8$

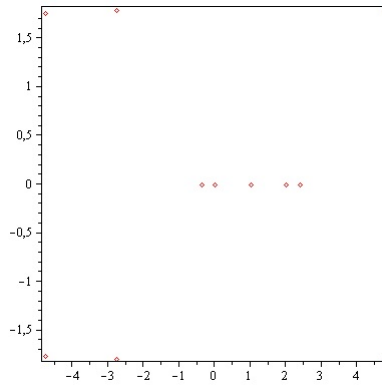


FIGURE 1.14 – singularité pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et $k = -4.9$

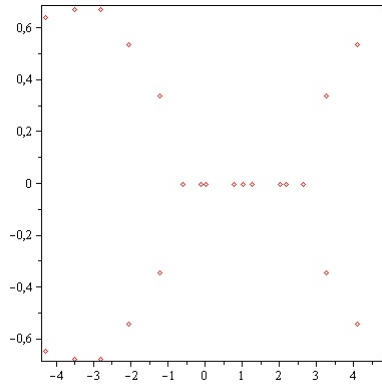


FIGURE 1.15 – singularité pour $\beta = 1.3\pi$ et $k = -4.9$

Chapitre 2

Etude de cas lorsque σ reste du même signe dans un voisinage de la frontière.

Nous allons maintenant étudier un cas pour lequel les techniques variationnelles classiques ne fonctionnent plus ou ne sont plus suffisantes. Nous nous référerons constamment à chapitre 11 de [4]

2.1 Quelques rappels sur les opérateurs

Comme évoqué précédemment, il est important de savoir si un problème est bien posé ou non. Cela passe notamment par une étude du caractère Fredholm de l'opérateur en jeu.

Définition 1 Soit X et Y deux espaces de Banach et L un opérateur linéaire et continu de X dans Y . L est dit de Fredholm si :

- $\dim(\ker L) < \infty$ et $\text{Im } L$ est fermée ;
- $\dim(\text{coker } L) = \dim(Y/\text{im } L) < \infty$.

On définit alors l'indice de L par $\text{ind}(L) = \dim(\ker L) - \dim(\text{coker } L)$. Une caractérisation très pratique est donnée par le lemme suivant :

Lemme 2 (Peetre) Soit X, Y, Z trois espaces de Banach tels que X s'injecte de façon compacte dans Z . Soit L un opérateur linéaire continu de X dans Y . Si $X=Y$, que L est autoadjoint et que l'estimation suivante est vraie, alors L est de Fredholm :

$$\exists C > 0 / \forall x \in X, \|x\|_X \leq C(\|Lx\|_Y + \|x\|_Z)$$

Preuve : Etant donnée l'importance de ce lemme pour mon étude en toute fin de troisième partie, une démonstration est proposée en annexe A.

Dans le cas de l'opérateur $u \mapsto \operatorname{div}(\sigma \nabla u)$, pour établir l'estimation montrant qu'il est de Fredholm, la philosophie générale est la suivante, en s'inspirant de ce qui a été fait en [7] et [8] : on utilise la méthode de la T-coercivité localement mêlée à une partition de l'unité pour obtenir l'estimation globale.

Nous n'allons pas l'utiliser dans l'exemple qui suit mais une allusion méritait quand même d'être réalisée, tant ce lemme est habituellement utilisé pour montrer le caractère Fredholm.

Dans l'exemple à suivre, nous utiliserons plutôt le théorème 3.3.3 de [4] que nous énonçons :

Théorème 4 *Soit X et Y deux espaces de Banach et A un opérateur linéaire et continu de X dans Y .*

- *Si A possède une paramétrix à gauche, i.e. s'il existe un opérateur $R_g \in L(Y, X)$ tel que $R_g A = Id_X + K_X$, où K_X est un opérateur compact de X , alors $\ker A$ est de dimension finie, et $\operatorname{im} A$ est fermée dans Y ;*
- *Si A possède une paramétrix à droite, i.e. s'il existe un opérateur $R_d \in L(Y, X)$ tel que $A R_d = Id_Y + K_Y$, où K_Y est un opérateur compact de Y , alors $\operatorname{im} A$ est fermée dans Y et $Y/\operatorname{im} A$ est de dimension finie;*
- *Si A possède une paramétrix à gauche et une paramétrix à droite, alors A est de type Fredholm, et la réciproque est également vraie. Dans ce cas, on peut prendre $R_g = R_d$.*

2.2 Caractère Fredholm de l'opérateur

De façon plus précise c'est le caractère Fredholm de l'opérateur B défini de la façon suivante que nous étudierons : la forme bilinéaire a étant continue, alors par le théorème de représentation de Riesz sur $H_0^2(\Omega)$, on obtient un opérateur B linéaire et continu de $H_0^2(\Omega)$ dans lui-même tel que :

$$\forall (u, v) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega), (Bu, v)_{H_0^2(\Omega)} = a(u, v)$$

On va montrer que B est Fredholm d'indice zéro dans la configuration suivante (on n'est plus sur un secteur, voir la figure ci-dessous) : Soit σ tel que $(\sigma, \sigma^{-1}) \in L^\infty(\Omega)^2$ avec $\sigma(x) \geq C_1 > 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \bar{O}$ ou $\sigma(x) \leq C_2 < 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \bar{O}$ où C_1, C_2 sont des constantes et O un ouvert $O \subset \Omega$.

σ est supposée uniformément positive ou uniformément négative dans la région verte $\Omega \setminus \bar{O}$. On va construire une paramétrix à droite pour B . On se place dans le cas où $\sigma(x) \geq C_1 > 0$ presque partout sur $\Omega \setminus \bar{O}$, l'autre cas se traitant de façon similaire. Considérons une fonction de troncature $\zeta \in C_0^\infty(\Omega, [0, 1])$ identiquement égale à 1 sur l'ouvert O . Alors, $1 - \zeta \in$

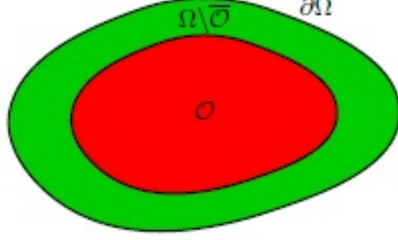


FIGURE 2.1 – omega borné

$C_0^\infty(\bar{\Omega}, [0, 1])$ valant 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Soit $(v, \varphi) \in H_0^2(\Omega)^2$, on a $(1 - \zeta)v \in H_0^2(\Omega)$. Ainsi :

$$((1 - \zeta)\sigma\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (B((1 - \zeta)v), \varphi)_{H_0^2(\Omega)} + (\sigma(2\nabla v \cdot \nabla\zeta + v\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega$$

Sur $\text{supp}(\zeta)$, σ change de signe donc on procède différemment. Soit Ψ l'unique solution de $H_0^1(\Omega)$ de $\Delta\Psi = \sigma^{-1}\Delta v \in L^2(\Omega)$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, les résultats classique de régularité intérieure et le théorème 2.1.3 de [3] permettent de montrer que $\chi\Psi \in H_0^2(\Omega)$ et l'estimation suivante : $\|\chi\Psi\|_{H_0^2(\Omega)} \leq C\|\sigma^{-1}\Delta v\|_\Omega \leq C\|v\|_{H_0^2(\Omega)}$

On a aussi $\zeta\Psi \in H_0^2(\Omega)$ qui dépend continûment de v . On a :

$$(\zeta\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega = (\sigma\zeta\Delta\Psi, \Delta\varphi)_\Omega = (B(\zeta\Psi), \varphi)_{H_0^2(\Omega)} - (\sigma(2\nabla\Psi \cdot \nabla\zeta + \Psi\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega$$

Soit T l'endomorphisme de $H_0^2(\Omega)$ défini par $T : v \mapsto \zeta\Psi + (1 - \zeta)v$. Par le théorème de représentation de Riesz, on exhibe les endomorphismes I et K continus de $H_0^2(\Omega)$ tels que $\forall (v, \varphi) \in H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} (Iv, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} &= ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega \\ (Kv, \varphi)_{H_0^2(\Omega)} &= (\sigma(2\nabla(\Psi - v) \cdot \nabla\zeta + (\Psi - v)\Delta\zeta), \Delta\varphi)_\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

On a alors $BoT = I + K$ avec T continu par l'estimation ci-dessus. Par coercivité de $(v, \varphi) \mapsto ((\zeta + (1 - \zeta)\sigma)\Delta v, \Delta\varphi)_\Omega$ sur $H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, I est un isomorphisme. Montrons ci-dessous que K est compact. Alors T sera bien une paramétrix à droite pour B qui est autoadjoint donc Fredholm d'indice zéro. Soit (φ_n) une suite bornée d'éléments de $H_0^2(\Omega)$. On a l'estimation : $\|K\varphi_n\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \leq C\|\varphi_n\|_{H_0^2(\Omega)}(\|\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} + \|\Psi_n\|_{H^1(\text{Supp}(\zeta))})$ De plus, les résultats de régularité intérieure donnent : $\|\Psi_n\|_{H^2(\text{Supp}(\zeta))} \leq C\|\varphi_n\|_{H_0^2(\Omega)}$ Par compacité des injections de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ et de $H^2(\text{Supp}(\zeta))$ dans $H^1(\text{Supp}(\zeta))$, on peut extraire des sous-suites de (φ_n) et (Ψ_n) , toujours notées de la même façon, convergeant fortement dans $H^1(\Omega)$ et $H^1(\text{Supp}(\zeta))$ donc de Cauchy. Par l'estimation, on obtient que $(K\varphi_n)$ est de Cauchy dans $H_0^2(\Omega)$ complet donc convergente, ce qui achève la preuve du théorème.

Chapitre 3

Etude de cas lorsque σ change de signe jusqu'au bord du domaine.

Sous cette hypothèse, il est possible de trouver des configurations pour lesquelles l'opérateur $G = \Delta(\sigma\Delta)$ n'est plus de type Fredholm. On le montre par l'existence de singularités qui ne sont pas dans l'espace variationnel $H_0^2(\Omega)$, ce qui permettra de contredire le lemme de Peetre. On se replace dans le cas du semi-secteur ($\beta = \pi$) et dans le cas où le contraste vaut -1 même si l'on pourrait sans doute généraliser à d'autres configurations.

3.1 calcul de singularités

L'objet de cette section est de montrer théoriquement l'existence de singularités non réelles sur l'axe $\text{Re}(\lambda)=1$.

Dans cette configuration, le déterminant du système est la fonction $c : \lambda \mapsto -1 + \sin(2\lambda\pi)\cos(\frac{\lambda\pi}{2}) + \cos^2(\lambda\pi) - 2\sin(\frac{\lambda\pi}{2})\cos^2(\lambda\pi) - 2\lambda^2 + 4\lambda$

On pose $\lambda = 1 + is$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $d : s \mapsto c(1 + is)$. On dispose des formules suivantes :

$$\begin{cases} \sin(2(1 + is)\pi) = \sin(2is\pi) = ish(2s\pi) \\ \cos(\frac{(1+is)\pi}{2}) = -\sin(\frac{is\pi}{2}) = -ish(\frac{s\pi}{2}) \\ \cos^2((1 + is)\pi) = \cos^2(is\pi) = ch^2(s\pi) \\ \sin(\frac{(1+is)\pi}{2}) = \cos(\frac{is\pi}{2}) = ch(\frac{s\pi}{2}) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} d(s) &= -1 + 4(1 + is) - 2(1 + is)^2 + sh(2s\pi)sh(\frac{s\pi}{2}) + ch^2(s\pi) - 2ch^2(s\pi)ch(\frac{s\pi}{2}) \\ &= 1 + 2s^2 + ch^2(s\pi) - 2ch^2(s\pi)ch(\frac{s\pi}{2}) + sh(2s\pi)sh(\frac{s\pi}{2}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

On constate d'une part que d est à valeurs réelles, ce qui simplifie considérablement la tâche car il n'y a pas un couple d'équations à considérer mais une seule pour la nullité du déterminant et de plus, que d est paire. On l'étudie donc sur \mathbb{R}_+ uniquement. Sachant que $d(0.1) < 0$ et $d(0.2) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires pour d continue donne l'existence d'une racine réelle positive $\eta \simeq 0.1917440520$ de d . Une étude rapide des variations de d sur \mathbb{R}_+ permet de montrer l'unicité que l'on retrouve dans le graphe suivant :

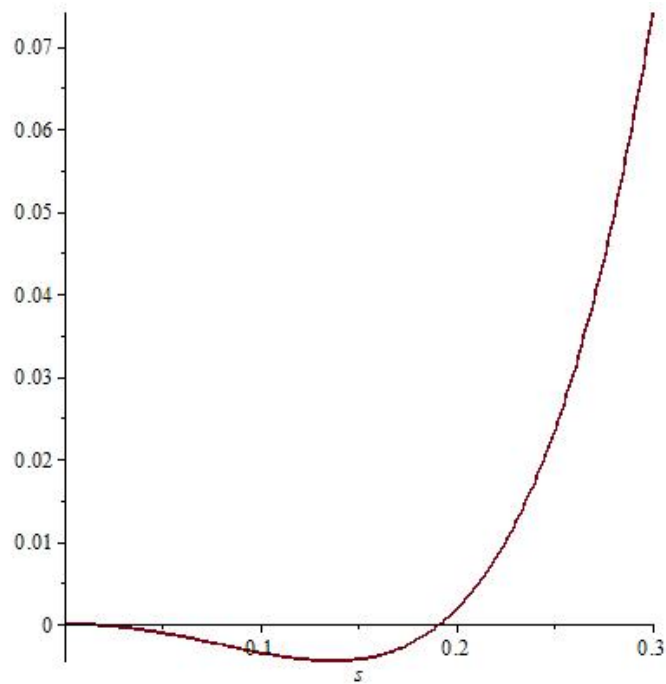


FIGURE 3.1 – singularité sur l'axe $Re(\lambda) = 1$

3.2 contradiction du lemme de Peetre

Servons-nous de cette singularité pour exhiber une suite (u_n) de fonctions telle que le premier membre de l'inégalité de Peetre explose tandis que l'autre reste borné quand $n \rightarrow \infty$. Considérons la singularité associée à l'exposant $1+i\eta$ et considérons $\chi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}, [0, 1])$ de support inclus dans $]-d, d[$ avec $d > 1$. valant 1 au voisinage de l'origine et telle que u_n s'annule sur $\partial\Omega$. Posons alors, pour $n > 0$, $u_n(r, \theta) = \chi(r)r^{1+i\eta+1/n}\varphi(\theta)$. Grâce au support compact de χ , on peut se ramener à $\Omega \cap \text{supp}(\chi)$ qui lui est borné. Néanmoins, on utilisera les mêmes notations pour les normes sur les deux ensembles car elles coïncident pour (u_n) .

Remarquons déjà que l'on vérifie toutes les autres hypothèses du lemme :

- G est autoadjoint ;
- G est continu de $H_0^2(\Omega)$ dans $H^{-2}(\Omega)$;
- l'injection i de $H_0^2(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$ dans $H^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$ est compacte.

Preuve des deux derniers points :

On pose, $\|\Delta(\sigma\Delta u)\|_{H^{-2}(\Omega)} = \sup_{v \in H_0^2(\Omega), \|v\|_{H_0^2(\Omega)}=1} (|\int \sigma\Delta u\Delta v|)$. On a la continuité de G par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|Gu\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq \|\sigma\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ sachant que $H_0^2(\Omega)$ est muni de la norme $u \mapsto \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$.

On se place en coordonnées cartésiennes. Soit (u_n) une suite bornée dans $H^2(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$. Définis $v_n = \frac{\partial u_n}{\partial x}$ et $w_n = \frac{\partial u_n}{\partial y}$. Les suites (v_n) et (w_n) sont bornées dans $H^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$ car $(u_n) \in H^2$. On peut en extraire des suites qui convergent dans $L^2(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$ par le théorème de Rellich (rappelez que $\Omega \cap \text{supp}(\chi)$ est borné). Ainsi, (u_n) converge dans $H^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$.

Montrons que (U_n) est bornée dans $H^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$. Intégrant sur un compact de \mathbb{R}^2 , il suffit de montrer qu'elle et ses dérivées sont uniformément bornées pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Sachant que par construction, on a la suite $(U_n) \in H_0^2(\Omega \cap \text{supp}(\chi)) \subset H_0^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$, on peut montrer, par équivalence des normes, que (U_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega \cap \text{supp}(\chi))$.

Posons $v_n(r, \theta) = \chi(r)r^{1+1/n}\varphi(\theta)$ et $e = \max(\sup_{[-d,d]}\chi^2(r), \sup_{[-d,d]}\chi'^2(r))$

On a $|\nabla(u_n)|^2 = (\frac{\partial v_n}{\partial r})^2 + (\frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial \theta})^2$ avec,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v_n}{\partial r}\right)^2 &= \varphi^2(\theta)\left(\chi'(r)r^{1+\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\chi(r)\right)^2 \\ &\leq 2\varphi^2(\theta)(ed^4 + 4ed^2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_n}{\partial \theta}\right)^2 &= r^{\frac{2}{n}}\chi^2(r)\varphi'^2(\theta) \\ &\leq d\varphi'^2(\theta)e \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ces deux estimations permettent de conclure quant au caractère uniformément borné pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur le compact pour conclure le premier point.

Montrons maintenant que $\|u_n\|_{H_0^2(\Omega)}$ explose. On a $\|u_n\|_{H_0^2(\Omega)} \geq \|\Delta u_n\|_\Lambda$ avec $\Lambda = \{(r, \theta) \in \Omega / \chi(r) = 1\}$.

Rappelons qu'en polaire, $\Delta = \frac{1}{r^2}[(r \frac{\partial}{\partial r})^2 + (\frac{\partial}{\partial \theta})^2]$.

Calculons Δu_n sur Λ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r^2} [(1 + i\eta + \frac{1}{n})^2 r^{1+i\eta+\frac{1}{n}} \varphi(\theta) + r^{1+i\eta+\frac{1}{n}} \varphi''(\theta)] \\ &= r^{-1+i\eta+\frac{1}{n}} [(1 + i\eta + \frac{1}{n})^2 \varphi(\theta) + \varphi''(\theta)] \\ &= r^{-1+i\eta+\frac{1}{n}} g_n(\theta) \end{aligned}$$

On vérifie que g_n est non nulle. Alors, on a directement,

$$\|\Delta u_n\|_\Omega^2 \geq \int_{r=0}^d r^{-1+\frac{2}{n}} dr \|g_n\|_{L^2([0, \pi])}^2.$$

Or, $\int_{r=0}^d r^{-1+\frac{2}{n}} dr = \frac{n}{2} d^{\frac{2}{n}} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Maintenant, montrons que $(\|\Delta(\sigma \Delta(u_n))\|_{H^{-2}})$ reste bornée. On pose $s_n = r^{1+i\eta+\frac{1}{n}} \varphi(\theta)$. Soit v unitaire dans $H_0^2(\Omega)$, on a la formule suivante $\chi \Delta v = \Delta(\chi v) - v \Delta \chi - 2\nabla v \cdot \nabla \chi$ et :

$$\begin{aligned} \sigma \Delta u_n \Delta v &= \sigma [s_n \Delta(\chi) + \chi \Delta(s_n) + 2\nabla s_n \cdot \nabla \chi] \Delta v \\ &= \sigma \Delta s_n [\Delta(\chi v) - v \Delta \chi - 2\nabla v \cdot \nabla \chi] + 2\sigma \nabla s_n \cdot \nabla \chi \Delta v + \sigma s_n \Delta \chi \Delta v \\ |\int_\Omega \sigma \Delta u_n \Delta v| &\leq |\int_\Omega \sigma \Delta s_n \Delta(\chi v)| + |\int_\Omega \sigma \Delta s_n (2\nabla v \cdot \nabla \chi)| + |\int_\Omega \sigma \Delta s_n v \Delta(\chi)| \\ &\quad + |\int_\Omega 2\sigma \nabla s_n \cdot \nabla \chi \Delta v| + |\int_\Omega \sigma s_n \Delta \chi \Delta v| \end{aligned}$$

Pour les quatrième et cinquième termes, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le fait que (s_n) est bornée dans $H^1(\Omega)$ pour conclure et que χ est infiniment dérivable à support compact (les termes en χ ne posent alors aucun problème) :

$$|(\nabla s_n \cdot \nabla \chi, \sigma \Delta v)| \leq C \|s_n\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

$$|(s_n \sigma \Delta \chi, \Delta v)| \leq C \|s_n\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

Pour les deuxième et troisième termes, on utilise le fait que χ est identiquement égale à 1 au voisinage de l'origine et donc que toutes ses dérivées sont nulles. Pour le deuxième terme par exemple :

$$|\int_\Omega \sigma \Delta s_n (2\nabla v \cdot \nabla \chi)| = |\int_{\Omega \setminus B(O, d)} \sigma \Delta s_n (2\nabla v \cdot \nabla \chi)| \leq C \|\Delta s_n\|_{\Omega \setminus B(O, d)} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

sachant que $\|\Delta s_n\|_{\Omega \setminus B(O, d)}$ reste borné.

Pour le premier terme, on réalise deux intégrations par parties et on fait le calcul explicite en utilisant l'équation vérifiée par la singularité :

$$|\int \sigma \Delta s_n \Delta(\chi v)| = |\int \Delta(\sigma \Delta s_n)(\chi v)|$$

$$\Delta(\sigma\Delta s_n) = r^{-3+i\eta+\frac{1}{n}}\sigma[(i\eta+\frac{1}{n})^4-2(i\eta+\frac{1}{n})^2+1]\varphi(\theta)+(2+2(i\eta+\frac{1}{n})^2)\varphi''(\theta)+\varphi^{(4)}(\theta)]$$

Or, $r^{1+i\eta}\varphi(\theta)$ étant une singularité, on a l'équation suivante :

$$((i\eta)^4 - 2(i\eta)^2 + 1)\varphi(\theta) + (2 + 2(i\eta)^2)\varphi''(\theta) + \varphi^{(4)}(\theta) = 0 \text{ et ainsi,}$$

$$\Delta(\sigma\Delta s_n) = r^{-3+i\eta+\frac{1}{n}}\sigma[(\frac{1}{n^4} + \frac{3i\eta}{n^2} - \frac{2}{n^2} - \frac{4i\eta}{n})\varphi(\theta) + (\frac{2}{n^2} + \frac{4i\eta}{n})\varphi''(\theta)]$$

La fonction entre crochets est notée $\frac{\varphi_n(\theta)}{n}$ et on remarque que le module de φ_n est majoré par le module de φ au moins à partir d'un certain rang (décroissance du module en $\frac{1}{n}$). On obtient ainsi, après deux intégrations par parties selon r sur χv ,

$$(\Delta(\sigma\Delta s_n), \chi v) = \int_0^\pi \int_0^d \sigma \frac{r^{-1+i\eta+\frac{1}{n}}}{(i\eta+\frac{1}{n})(i\eta+\frac{1}{n}-1)} \frac{\varphi_n(\theta)}{n} \frac{\partial^2(\bar{\chi}v)}{\partial r^2} r dr d\theta$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la régularité de χ évoquée, on obtient :

$$|(\Delta(\sigma\Delta s_n), \chi v)| \leq \frac{C}{n} (\int_0^\pi \int_0^d (\sigma \frac{r^{-1+\frac{1}{n}}}{|(i\eta+\frac{1}{n})(i\eta+\frac{1}{n}-1)|} |\varphi(\theta)|)^2 r dr d\theta)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H_0^2(\Omega)}$$

$$|(\Delta(\sigma\Delta s_n), \chi v)| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \text{ donc le terme est borné car on a pour son carré,}$$

$$\frac{1}{n^2} \int_0^\pi \int_0^d (\sigma \frac{r^{-1+\frac{1}{n}}}{|(i\eta+\frac{1}{n})(i\eta+\frac{1}{n}-1)|} |\varphi(\theta)|)^2 r dr d\theta \leq C \frac{1}{n^2} \int_0^d r^{-2+\frac{2}{n}} r dr \leq \frac{C}{n}$$

On arrive donc à borner les cinq termes et l'inégalité de Peetre n'est pas vérifiée d'où le côté non Fredholm.

3.3 Conclusion

En conclusion, le caractère bien posé du problème au bilaplacien avec contraste dépend à la fois de la géométrie du domaine (et notamment de la convexité, du caractère borné ou non et de la régularité de la frontière) et du signe du contraste.

La recherche intuitive de singularités nous a permis de retrouver les résultats classiques connus pour le bilaplacien sans contraste mais certains obstacles n'ont pu être surmontés. D'une part, on ne sait pas si les singularités que j'ai étudiées sont les seules existantes, d'autre part, je n'ai pas pu adapter les démonstrations effectuées dans le cas sans contraste au cas avec contraste pour montrer qu'il y a une infinité de singularités. Ce n'est qu'à travers l'observation par Maple que nous avons pu conjecturer un tel résultat, et d'ailleurs ce ne fut pas immédiat car nous avons rencontré quelques soucis techniques avec Maple. Je n'ai pas pu, contrairement à ce qui a été fait dans la thèse de Lucas, établir d'intervalle exact pour le contraste, donnant l'ensemble des configurations dans lesquelles on a un problème mal posé.

Néanmoins, cette première immersion dans le monde de la recherche fut enrichissante à plus d'un titre. Elle m'a permis d'entrevoir les différentes composantes du métier : tout d'abord, une profonde recherche documentaire afin d'assimiler le problème, puis l'entreprise personnelle des calculs durant laquelle je me suis posé à la fois des questions purement techniques mais aussi des questions plus générales, ayant rapport à la philosophie globale du problème. Chaque avancement amenait un nouveau questionnement. Enfin, la maîtrise de l'outil informatique (logiciels de programmation et calculs formels) et de l'anglais me sont aussi apparues comme des éléments essentiels pour la recherche en mathématiques appliquées.

Ce fut aussi une belle aventure humaine avec un environnement très accueillant. Cette expérience a conforté mes envies futures, à savoir effectuer une thèse pour devenir enseignant-chercheur.

Bibliographie

- [1] Patrick Ciarlet, Eric Lunéville : *La méthode des éléments finis, De la théorie à la pratique. I. Concepts généraux*. Cours MA 201, année 2011-2012, Presses de l'ENSTA.
- [2] Haim Brézis : *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Mathématiques appliquées pour le master, Editions Dunod.
- [3] P.Grisvard : *Singularities in boundary value problems*. Research notes in applied mathematics, Editions MASSON.
- [4] Lucas Chesnel : *Etude de quelques problèmes de transmission avec changement de signe. Application aux méta-matériaux*. Thèse de mathématiques appliquées, Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique.
- [5] Barles : *Première partie, introduction à la méthode des éléments finis*. Cours d'analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Université de Tours.
- [6] McLean : *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [7] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Lucas Chesnal, Patrick Ciarlet Jr : *optimality of T -coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials*.
- [8] Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Lucas Chesnal, Xavier Claeys : *radiation condition for a non-smooth interface between a dielectric and a metamaterial*.
- [9] Patrick Ciarlet Jr : *Tools for solving the div-curl problem with mixed boundary conditions in a polygonal domain..* March 1999.
- [10] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, J.Rossmann : *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*. American Mathematical Society, volume 85.
- [11] Marc Lenoir : *Fonctions d'une variable complexe*. Cours MA 205, année 2011-2012, Presses de l'ENSTA.

Annexe A

Lemme de Peetre (preuve)

On veut d'abord montrer que $\text{Ker}(L)$ est de dimension finie. Par le lemme de Riesz, il suffit de montrer que sa boule unité est compacte.

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de la boule unité de $\text{Ker}(L)$. Par compacité de l'injection de X dans Z , on peut en extraire une sous-suite, toujours notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente dans Z . Elle est donc de Cauchy. Or, d'après l'estimation supposée, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $\|U_n\|_X \leq C\|U_n\|_Z$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy dans X qui est complet donc converge.

Sachant que L est autoadjoint, $\text{coker}(L)$ et $\text{Ker}(L)$ sont isomorphes donc $\text{coker}(L)$ est de dimension finie. Voir théorème 2.13 [6] pour une démonstration.

Montrons que $\text{Im}(L)$ est fermée. On s'inspire de section 3.1 de [5]. Par le théorème de Hahn-Banach, $\text{Ker}(L)$ admet un supplémentaire fermé, noté G . On a l'estimation suivante :

$$\exists c > 0 / \forall u \in G, c\|u\|_X \leq \|Lu\|_X$$

Ceci donne directement le caractère fermé de $\text{Im}(L)$. En effet, soit $(LU_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a . On a $(LU_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy car convergente et par l'estimation $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X complet, donc converge vers b . Par continuité de L en b , $(LU_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Lb et par unicité de la limite, $a = Lb$ donc $a \in \text{Im}(L)$.

Démontrons maintenant cette estimation. Si par l'absurde elle est fausse, alors on peut exhiber une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G unitaire dans X telle que $(AU_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro dans X donc de Cauchy. Par compacité de l'injection de X dans Z , on extrait une sous-suite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toujours notée $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans Z donc de Cauchy.

Avec l'estimation initiale, on en déduit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X complet donc convergente vers u et comme G est fermé, $u \in G$. Par la seconde inégalité triangulaire, on a u unitaire dans X car $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est et comme $(AU_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro, par continuité de A en u et unicité de la limite, on a $Au = 0$ donc $u \in \text{Ker}(L) \cap G$ réduit à $\{0\}$ alors que u est unitaire.

Annexe B

exposants de singularité et régularité

On se contente de donner le détail pour les deux premiers cas uniquement, les cas suivants étant un peu plus techniques mais relativement similaires dans l'approche. Sachant que l'on intègre des fonctions C^∞ pour θ variant dans un compact, on ne considèrera que l'intégrale de la partie radiale. On veut connaître l'intégrabilité en zéro, on se contentera donc de considérer un réel $B > 0$ pour la borne supérieure. L'élément différentiel d'intégration est r.dr. On pose $\lambda = a + ib$ avec a et b réels.

Pour le premier point :

$$\begin{aligned} \int_0^B |r^{2\lambda}| r.dr &= \int_0^B |r^{2\lambda+1}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a+1} r^{2ib}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a+1} e^{2ib \ln(r)}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a+1}| dr \\ &= \left[\frac{r^{2a+2}}{2a+2} \right]_0^B \end{aligned}$$

Et ceci n'est fini que si $a > -1$ d'où le premier résultat voulu.

Pour le second point, ayant déjà la condition pour que u soit dans $L^2(\Omega)$, il suffit de regarder l'intégrale de $|\nabla u|^2$.

$$\text{On a } |\nabla u|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right|^2 = r^{2\lambda-2} (|\lambda \varphi(\theta)|^2 + |\varphi'(\theta)|^2)$$

L'intégrale à calculer est alors :

$$\begin{aligned}\int_0^B |r^{2\lambda-2}| r.dr &= \int_0^B |r^{2\lambda-1}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a-1}r^{2ib}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a-1}e^{2ib.\ln(r)}| dr \\ &= \int_0^B |r^{2a-1}| dr \\ &= \left[\frac{r^{2a}}{2a} \right]_0^B\end{aligned}$$

Et ceci n'est fini que si $a > 0$ d'où le second résultat voulu.