Question préliminaire : On considère une bille parcourant l'axe réel, et on note $x(t)$ la position de la bille au cours du temps. L'expérience commence en posant la bille en un certain $a > 0$ à l'instant initial. On a donc $x(0) = a$. Déterminer la position $x(t)$ de la bille à tout instant si l'on sait que sa vitesse est constante et égale à $v > 0$.

1 Exercice 1 : A la découverte d'une loi de poursuite automobile

1.1 Notations et configuration géométrique de la route.

On considère le modèle simplifié de trafic routier suivant : soit une route infinie rectiligne à une voie, sans feux tricolores ni panneaux de signalisation, sur laquelle se succèdent un nombre infini de voitures.

Chaque voiture est labellisée par un indice $i \in \mathbb{Z}$, avec la convention que la voiture $i+1$ est située devant la voiture i. On note $X_i(t)$ la position de la voiture i au cours du temps, et $V_i(t)$ sa vitesse. On suppose que la vitesse de tous les conducteurs est bornée et que la borne est la même pour tout le monde ; on la note $V_{max} > 0$.

1.2 Modélisation de la loi de poursuite : choix du comportement des conducteurs

On suppose que la vitesse de chaque véhicule est proportionnelle à l'interdistance avec le véhicule qui le précède. En effet, si le conducteur $i+1$ est "proche" du conducteur i, le conducteur i aura tendance à ne pas aller trop vite afin de ne pas rentrer en collision avec le conducteur $i+1$ devant lui. A l'inverse, si le conducteur $i+1$ est loin devant, le conducteur i pourra conduire à une grande allure. Le coefficient de proportionnalité est fixé à 1.

Chaque conducteur prend néanmoins un certain temps, appelé "temps de réaction", entre l'observation de l'interdistance et la décision d'appuyer sur l'accélérateur ou le frein. Dans la réalité, le temps de réaction dépend de chaque conducteur. Afin de simplifier l'étude, on suppose que tous les conducteurs ont le même temps de réaction, noté τ. Voici un schéma résumant la situation :

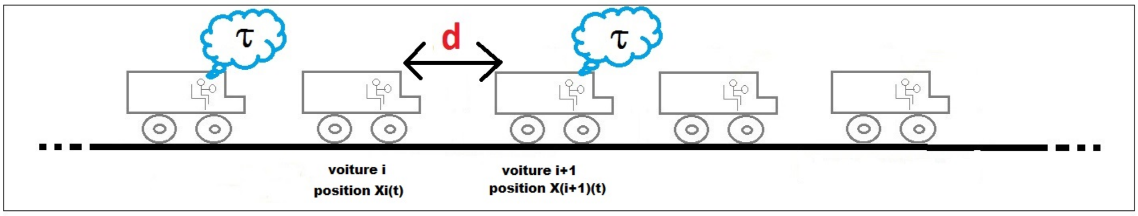

FIGURE 1 – Schéma de la loi de poursuite.

1.3 Questions

1) Donner des paramètres pouvant jouer sur la valeur du temps de réaction des conducteurs. Le taux d'alcoolémie est un premier exemple.

2) Critiquer le modèle présenté : semble t-il être réaliste par rapport aux situations que vous avez rencontrées dans votre quotidien ? En quoi est-il différent ?

3) On considère un des véhicules i du problème. Donner l'équation donnant sa vitesse en fonction de des positions de ce véhicule et du véhicule qui le précède. Indication : on n'oubliera pas de tenir compte du temps de réaction.

NB : On voit que l'on a à faire à un système déjà complexe : il y a un nombre infini d'équations, toutes couplées les unes aux autres. La vitesse du conducteur i dépend de la position du conducteur $i+1$ et donc de sa vitesse.

4) On considère que l'on étudie l'évolution des véhicules sous cette loi à partir de $t=0$ et que l'on a filmé les positions libres de tous les véhicules sur l'intervalle de temps $[-\tau, 0]$ (grâce à un réseau infini de caméras disposées le long de la route). Montrer, "avec les mains", que cela permet de connaître la position des véhicules pour tout temps. Indication : on raisonnera par intervalles successifs de longueur τ.

NB : Si besoin, on pourra s'inspirer d'un exemple particulier : le cas où chaque véhicule i stationne à la position i sur $[-\tau, 0]$. On pourra s'aider de la question préliminaire.

5) On suppose que $\tau > 2$. A l'aide d'une réflexion sur le modèle proposé et de la question préliminaire, montrer que si l'on choisit judicieusement les positions initiales libres sur $[-\tau, 0]$, alors il peut y avoir collision de véhicules.

On dit alors que le temps de réaction provoque une instabilité au niveau du trafic.

2 Exercice 2 : Modélisation de feux triocolores.

2.1 Enoncé et hypothèses

On considère le modèle précédent à une différence près : la route comporte une infinité de feux tricolores équidistants de 1 kilomètre (pour fixer les choses, disons qu'il y a un feu en chaque $k \in \mathbb{Z}$).

L'effet sur l'équation de la vitesse des conducteurs est que le coefficient de proportionnalité est remplacé par une fonction de deux variables $\psi(x,t)$ où t est le temps, et x la variable d'espace. On rappelle qu'un feu tricolore a pour but de réguler le flux de voitures et a pour effet de ralentir les conducteurs.

L'objectif de cet exercice est de déterminer une expression possible de ψ à l'aide d'hypothèses simplificatrices. Nous n'étudierons pas le mouvement des conducteurs sous ce nouveau modèle.

2.2 Questions

0) A l'aide de l'énoncé, justifiez que la fonction ψ prend ses valeurs dans l'intervalle $[0;1]$.

1) Considérons une voiture isolée située au milieu de deux feux tricolores (située à 500 mètres de chaque feu donc). Les feux ont-ils une influence sur la vitesse de la voiture ? En déduire la valeur de la fonction ψ loin des feux (on appellera cette zone, la zone libre).

Remarque : Une voiture commencera donc à ralentir uniquement à l'approche d'un feu (et si celui-ci n'est pas au vert).

2) Considérons une voiture arrêtée à un feu rouge. Si le feu passe au vert, la voiture retrouve-t-elle instantanément sa vitesse maximale V_{max} ?

3) Déduire de la remarque, et de la question précédente que chaque feu a une petite zone influence en amont et en aval. Pour chaque feu positionné en $x=k$, on pose $i_r(k) =]k-r; k+r[$ la zone d'influence du feu avec r de l'ordre de 50 mètres (donc très petit devant l'interdistance entre deux feux).

Par opposition, la zone où le feu n'a pas d'influence sera appelée "zone libre", ce qui est le cas de la voiture dans la question 1).

Voici un schéma :

Figure 2 – Schéma de feux avec zones d'influence.

Considérons maintenant un seul feu isolé (c'est-à-dire sans considérer son effet sur la route). On note $p(t)$ la fonction valeur associée à ce feu. On dira que $p(t)$ sera égale à zéro lorsque le feu est rouge et à un lorsque le feu est vert. La fonction valeur est une fonction périodique.

En conséquence, on considère qu'une voiture étant arrivée au niveau d'un feu rouge aura une vitesse nulle et qu'une voiture arrivant à un feu vert agira comme si le feu n'existait pas.

4) Que vaut donc $\psi(k,t)$ pour $k \in \mathbb{Z}$?

5) Donner les valeurs de $\psi(k-r,t)$ et $\psi(k+r,t)$ pour que ψ soit continue en espace, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de saut dans ses valeurs.

Indication : on doit raccorder ce qu'il se passe dans la zone d'influence avec la zone libre.

6) On suppose que ψ est affine en espace sur la zone $[k; k+r]$. En déduire son expression sur cette zone.

7) Faire de même sur $[k-r; k]$.

On a donc l'expression de ψ sur la zone libre et sur la zone d'influence des feux.