# 1 Remarques préliminaires

– Durée : 1h30. Tous documents interdits. Utilisation des portables et des calculatrices interdite. Une séance facultative de correction du CC2 sera faîte après un cours.

– Une attention particulière sera portée à la rédaction et l'absence de justification sera sanctionnée. Le sujet parcourt divers thèmes du programme, et certaines questions sont indépendantes. On pourra admettre le résultat de questions précédentes pour avancer dans les problèmes en cas de blocage. Les "questions bonus" sont **facultatives**.

# 2 Problème 1

On considère la fonction $f$ d'une variable réelle définie de la façon suivante :

$$f(x) = (e^{x^2} + 1)^2.$$

1) Donner la classe de $f$ et étudier ses variations sur son ensemble de définition.

2) Analyser la parité de $f$. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme de Taylor de $f$ à l'ordre $n$ en zéro n'admet que des termes de degré pair.

On pose

$$l(x, y) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}}$$

$$j(x, y) = \sqrt{\frac{f(x)}{f(y) - 4}}$$

3) Notons $Dl$ et $Dj$ les ensembles de définition respectifs. Que valent-ils ? $l$ et $j$ sont-elles $C^2$ sur $Dl$ et $Dj$ ?

4) Indiquer l'expression générale de la Hessienne de $l$ en $M_0 = (x_0; y_0)$ puis explicitez et simplifiez pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

5) La fonction $l$ est-elle convexe autour de $(1; 0)$ ?

6) Donner un développement limité de $l$ à l'ordre 2 en $(1; 0)$.

7) Question bonus : Sans les calculer, rappeler les expressions des élasticités partielles de $l$ sur $]0; +\infty[^2$.

8) Que vaut $l$ sur l'ensemble $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 0 \text{ et } xy > 0\}$ ?

9) Question bonus : Donner l'expression de la dérivée de la fonction $r : x \mapsto \sqrt{f(\sqrt{x})} - 1$ pour $x > 0$.

10) $f$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}$ ?

On pose

$$p(x, y) = f(x) + f(y)$$

$$q(x, y) = f(x) - f(y).$$

11) Montrer que $p$ admet un unique minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Calculer le gradient de $p$ au point réalisant ce minimum. Que retrouve-t-on ?

12) $q$ admet-t-elle un extremum global sur $\mathbb{R}^2$ ? Indication : S'aider des fonctions partielles.

## 3 Problème 2

On considère $a$ et $b$ définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$a(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$b(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

On définit sur $\mathbb{R}^2$, deux fonctions $c$ et $d$ par : $c(x, y) = a(x + y)$ et $d(x, y) = b(x + y)$.

1) Que vaut $d^2 - c^2$ ? Donner les expressions de $a'$ et $b'$.

2) Montrer que $c(x, y) = a(x)a(y) + b(x)b(y)$.

3) Calculer $\frac{\partial c}{\partial x}(x, y)$. Que remarque t-on ?

4) En déduire $d(x, y)$ en fonction de $a(x)$, $b(x)$, $a(y)$, $b(y)$ puis $d(x, x)$ en fonction de $a(x)$ et $b(x)$.

## 4 Questions de cours.

Temps maximum conseillé : 10 minutes. Dire, en justifiant succinctement, si les ensembles suivants sont ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre, bornés ou non, convexes ou non. Les dessins peuvent être admis comme justification. Les réponses doivent être brèves.

a) Un triangle équilatéral de côté 1 cm.

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 0\}$.

c) Le cercle de centre $O(0; 0)$ et de rayon $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

d) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$.

e) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x\}$.